



魏亦文, 王有学, 张智. 2017. 谱元法波场模拟中的属性建模技术. 地球物理学进展, 32(5): 2091-2096, doi: 10.6038/pg20170532.

WEI Yi-wen, WANG You-xue, ZHANG Zhi. 2017. Attribute modeling technique in the wavefield simulation using spectral element method. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 32(5): 2091-2096, doi: 10.6038/pg20170532.

## 谱元法波场模拟中的属性建模技术

### Attribute modeling technique in the wavefield simulation using spectral element method

魏亦文, 王有学, 张智

WEI Yi-wen, WANG You-xue, ZHANG Zhi

桂林理工大学地球科学学院 桂林 541004

College of Earth Sciences, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China

**摘要** 二维波动方程谱元法通常采用四边形网格, 网格质量和属性建模方式对波场模拟精度和效率有较大影响. 常规属性建模需要先建立几何模型再对其进行贴体网格剖分. 但在已知稠密属性控制点却难以建立复杂几何模型的问题. 针对此问题, 提出对模型进行矩形网格剖分并计算 GLL 点, 利用属性控制点对所有 GLL 点进行插值以提高属性建模的效率. 将属性建模方式归纳为单元属性建模方式和节点属性建模方式. 在节点属性建模方式中分析了双线性插值、快速 Gauss 径向基函数插值法的计算效率, 将两种插值算法集成于 SPECSEM2D 的属性建模程序中. 实例表明两种属性建模方式对谱元法波场模拟都是有效的.

**关键词** 波场模拟; 谱元法; GLL 点; Gauss 径向基函数; 四边形网格

中图分类号 P631

文献标识码 A

doi: 10.6038/pg20170532

**Abstract** The spectral element method of 2D wave equation is usually based on the quadrilateral mesh, and the mesh quality and attribute modeling methods have a great influence on the accuracy and efficiency of wave field simulation. The conventional attribute modeling needs to establish the geometric model and its body fitted mesh. However, the problem is that it is difficult to build a complex geometric model with dense attribute control points. In view of this problem, the model is divided into rectangular meshes and GLL (Gauss-Labotto-Legendre) points' coordinates are computed. Properties of all GLL points are interpolated by attribute control points to improve the efficiency of attribute modeling. The attribute modeling method is summarized as the element attribute modeling method and node attribute modeling method. The efficiency of bi-linear interpolation and fast Gauss radial basis function interpolation method are analyzed in node property modeling, and then these two interpolation algorithms are integrated into the attribute modeling program of SPECSEM2D. Examples show that both modeling methods are valid for the spectral element wave field simulation.

**Keywords** wave field simulation; spectral element method; GLL points; Gauss radial basis function; quadrilateral mesh

## 0 引言

波动方程数值模拟中的有限差分法、传统有限元法、谱元法、间断有限元法具有各自的优势, 在高精度逆时偏移和波形反演中已得到广泛的应用. 谱元法结合 Legendre 或 Chebyshev 伪谱法与有限元法的优点, 允许不同的单元大小, 且在不同单元中用不同阶基函数逼近波场值, 谱元法能够采用较稀疏单元划分达到有限元法相同精度, 高阶插值不出现 Runge 现象且并行计算容易实现 (Tromp, et al., 2008; Komatitsch, et al., 2010). 严珍珍等 (2009) 利用谱元法结合高性能并行计算, 分别对人工点源和复合源激发的汶川大地

震地震波的全球传播过程进行数值模拟. 王秀明等 (2007) 完整推导了谱元法中 Legendre 和 Chebyshev 展开的有关计算公式, 通过引入空间域中在预先条件下的共轭梯度的元元算法和时间域中时间积分的交错网格的预期/多次校正算法, 不需要形成有限元中的全局矩阵和有效载荷矢量, 从而提高了谱元法计算精度和计算效率. 二维波动方程 Legendre 谱元法程序包 SPECSEM2D 采用四边形单元对各向同性或各向异性介质进行弹性波场模拟、伴随波场模拟以及全波形反演 (Komatitsch and Vilotte, 1998; Tromp, et al., 2008). 谱元法将 GLL 积分节点取为插值点, 在 GLL 点上构造基函数, 生成的质量矩阵为对角矩阵. 刘有山等 (2014) 通过波动方

收稿日期 2017-03-02; 修回日期 2017-05-25. 投稿网址 <http://www.progeophys.cn>

基金项目 国家自然科学基金 (41574039, 41574078)、广西自然科学基金 (2015GXNSFB139184) 和广西高校科研项目 (KY2015LX113) 联合资助.

作者简介 魏亦文, 男, 1982 年生, 博士, 讲师, 主要从事波动方程数值模拟研究. (E-mail: weiyiwen1982@glut.edu.cn)

程谱元法数值模拟表明,与经典的四边形网格谱元法相比,三角网格谱元法能更好适应剧烈起伏地形,但波场模拟精度较低。

四边形网格谱元法波场模拟通常采用贴体网格(贾艳艳等,2014;李振春等,2016)和非贴体网格剖分方式,每个单元称为谱单元。本文将四边形谱元法波场模拟中属性建模方式归纳为单元属性建模和节点属性建模两种方式。单元属性建模是根据单元号和属性号对谱单元属性(密度、波速和弹性参数)赋值,在谱单元内属性为常数;节点属性建模方式是利用插值方法对所有谱单元的 GLL 点进行属性赋值,在单元内属性可以不是常数,比单元属性建模方式更具灵活性。

GLL 节点属性建模可以采用双线性插值(马德堂等,2014)和快速径向基函数插值法(Yokota *et al.*, 2010)实现。双线性插值需要四边形网格分布的属性控制点实现所有谱单元 GLL 点属性插值,如果属性控制点是散乱的,双线性插值会失效。针对  $N$  个离散控制点插值问题,Yokota 等(2010)提出计算复杂度和内存需求量均为  $O(N)$  的 Gauss 径向基函数插值并行算法,称为快速径向基函数插值,能处理控制点个数  $N = 10^3 \sim 10^6$ ,且其迭代收敛速度快。魏亦文和王彦春(2012)实现了薄板样条(TPS)径向基函数插值重构近地表模型,TPS 插值需要  $O(N^3)$  运算量和  $O(N^2)$  的内存。Gumerov 和 Duraiswami(2010)提出改进的迭代求解法(如 FGPO5)使径向基函数插值过程计算复杂度达到  $O(N \log N)$ ,但仍然需要  $O(N^2)$  的存储量。

## 1 波动方程 Legendre 谱元法中的 GLL 点

关于波动方程谱元法的理论公式推导和求解过程(Komatitsch and Vilotte, 1998; Tromp *et al.*, 2008; Komatitsch *et al.*, 2010; Cupillard *et al.*, 2012),此处不赘述。在谱元法中,Lagrange 多项式插值节点常取为 GLL (Gauss-Labotto-Legendre) 积分点(李孝波等,2014)。正方形参考单元(母单元)区域为  $\Lambda[-1, 1]$ ,其上任意点  $\psi(\xi, \eta)$  都满足  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ 。母单元使用  $n$  阶 Lagrange 插值多项式作为基函数,共有  $(n+1)^2$  个 GLL 点,在  $\xi$  或  $\eta$  方向上各有  $n+1$  个 GLL 点。在  $\xi$  方向上,GLL 点坐标  $\xi_\alpha$  满足方程:

$$(1 - \xi_\alpha^2) P_n'(\xi_\alpha) = 0, -1 \leq \xi_\alpha \leq 1, \alpha = 0; \dots, n, \quad (1)$$

其中  $P_n'(\xi)$  是  $n$  阶 Legendre 多项式的导数, $n$  阶 Legendre 多项式为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

在  $\xi$  方向上,通过  $n+1$  个 GLL 点  $\xi_\alpha$  ( $-1 \leq \xi_\alpha \leq 1, \alpha = 0, \dots, n$ ) 构造  $n+1$  个 Lagrange 插值基函数,公式为

$$\ell_\alpha^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0) \dots (\xi - \xi_{\alpha-1})(\xi - \xi_{\alpha+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_\alpha - \xi_0) \dots (\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})(\xi_\alpha - \xi_{\alpha+1}) \dots (\xi_\alpha - \xi_n)}, \quad (2)$$

$\ell_\alpha^n(\xi)$  满足  $\delta$  函数的性质,在  $\eta$  方向上的 GLL 点分布及插值函数与  $\xi$  方向相同。在母单元上波场的 Lagrange 插值以及 Gauss-Labotto-Legendre 波场函数的特殊积分规则使谱元法的质量矩阵为对角阵,四边形网格中 GLL 积分公式的计算精度随着 GLL 点的增加而增加。de Basabe 和 Sen(2007)证明 4 阶单元波动方程谱元法在计算精度和速度上得到折中。

4 阶单元中共有 25 个 GLL 点,如图 1 所示。在  $\xi$  方向上  $\xi_\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, 4$ ) 的值分别是  $\xi_2 = 0, \xi_3 = -\xi_1 = 0.65465, \xi_4 = -\xi_0 = 1$ ,利用式(2)构造 5 个 4 阶 Lagrange 插值基函数,如图 2 所示。

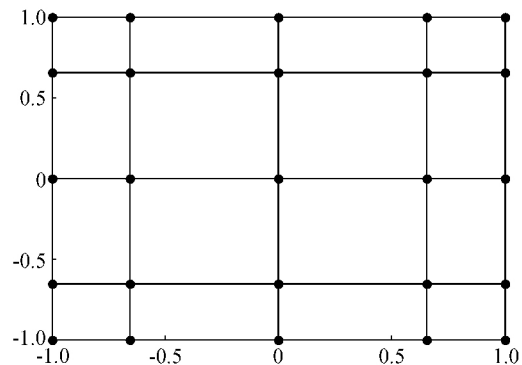


图 1 单元内 GLL 点

Fig. 1 GLL points of an element

SPECFEM2D 程序包可将 Gmsh 创建的 1 阶或 2 阶四边形单元贴体网格转换成内部格式的 4 阶单元,即谱单元默认为 4 阶单元,每个谱单元包含 25 个 GLL 点。SPECFEM2D 程序包也可以直接创建内部格式的规则矩形网格。为了保证谱元法计算结果的精度,要求每个波长内至少包含 5 个 GLL 点(Cupillard *et al.*, 2012),应满足条件为

$$\Delta x \leq \frac{n}{5} \lambda_{\min}, \quad (3)$$

式中  $\Delta x$  为单元边长, $n$  为 Lagrange 多项式的阶数,默认  $n = 4$ , $\lambda_{\min}$  为传播介质的最短波长,当震源为 Ricker 子波时,横波最短波长  $\lambda_{\min} = [V_s / f_c]_{\min}$ ,为介质中横波波速  $f_c$  为截止频率  $f_c = 2.5 f_p$ , $f_p$  为峰值频率。刘有山等(2014)利用 7 阶谱单元精确模拟面波,提出三角网格谱元法在每个最短的面波波波长内至少有 11 个采样点,然而经典的四边形谱元法只需要 4 个采样点。实际上最短波长可以是纵波、横波、面波的最短波长,由式(3)可以得到三种波最短波长内样点数计算公式为

$$n_s = \frac{n}{\Delta x} \lambda_{\min}. \quad (4)$$

谱元法若采用 Newmark 积分方法,为保证计算稳定性,时间步长必须满足 CFL 条件为

$$\Delta t \leq C [\Delta y / V_p]_{\min}, \quad (5)$$

其中  $\Delta y$  是相邻 GLL 点之间的距离, $V_p$  是介质中纵波波速, $C$  为 CFL 条件数,通常在 0.3 和 0.4 之间。

## 2 单元属性建模

单元属性建模方式是对于已经剖分好的四边形网格,根据单元号和属性号对单元属性进行赋值,适合块状贴体网格的属性建模。通过 Gmsh 建立带起伏地形的块状几何模型,属性号如图 3 所示,密度、纵横波速度如表 1 所示,最大纵波波速 6000 m/s,最小横波波速 2000 m/s。为保证计算精度,根据式(3)单元边长  $\Delta x$  与最小波长  $\lambda_{\min}$  存在约束关系,设置单元边长  $\Delta x = 50$  m,Ricker 子波峰值频率  $f_p = 30$  Hz。由式(4)计算得到最短横波波长内有 5.3 个样点,最短纵波波长内有

10.7 个样点. 在 SPECIFEM2D 程序中利用属性号对已编号的谱单元进行属性赋值后, 根据式(5) 设置时间采样间隔  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  s 进行谱元法波场模拟,  $t = 0.72$  s 时的波场快照如图 4 所示. 结果表明以上参数设置能较好压制数值频散.

表 1 块体属性  
Table 1 Block attribute

属性号	密度 $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	纵波速度 $v_p$ (m/s)	横波速度 $v_s$ (m/s)
1	2000	4000	2000
2	2000	6000	3000

### 3 节点属性插值建模

单元属性建模方式对于块状分布的地质结构特别适用, 但是对于复杂非均匀地质体的属性建模在单元内属性为常数是不精确的. 节点属性建模方式在单元内部的 GLL 点上对属性赋值, 从而能更好建立非均匀介质模型. 谱元法波场正演模拟程序包 SPECIFEM2D 对于 Gmsh 软件所建立四边形贴体网格的质量合格判定标准为, 必须满足每个单元上 Jacobi 行列式的值大于 0 以及单元最大偏度小于 0.75 的条件. 这会导致复杂构造模型贴体网格过程耗时过长. 例如常用的 Marmousi 模型很难建立准确的几何模型和贴体网格, 此时只需要矩形单元非贴体网格, 虽然几何模型缺失但存在一些属性控制点数据. 如果这些属性控制点分布在规则的矩形网格控制点上, 可以采用双线性插值所有 GLL 点属性值. 如果这些属性控制点是散乱的可以采用快速径向基函数插值所有 GLL 点属性值. 在快速径向基函数插值法中, 规则分布属性控制点也可以当成散乱控制点进行插值计算. 本文针对稠密网格控制点个数  $N > 10^4$  情况, 主要研究双线性插值和快速 Gauss 径向基函数插值属性建模方式.

#### 3.1 双线性插值

双线性插值将规则属性网格节点作为控制点, 将谱单元的 GLL 点作为待插值点. 双线性插值公式为

$$v(x, z) = a_0 + a_1x + a_2z + a_3xz, \quad (6)$$

通过式(6) 建立线性方程组, 可以快速求解系数  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , 从而内插单元内 GLL 点上属性值.

#### 3.2 快速 Gauss 径向基函数插值

快速 Gauss 径向基函数节点属性插值建模方式, 利用 Krylov 子空间法(KSP) 有效完成算法的并行计算(Yokota et al., 2010). 采用基于径向基函数插值建模流程, 控制点是散乱点, 有序节点可以当作散乱点进行处理. 在二维地下介质属性插值建模中, 已知散乱点  $x$  及属性函数为  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . 径向基函数(RBF) 插值构造的近似函数  $s(x)$  可表示为

$$s(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(\|x - x_j\|) + \sum_{k=1}^m b_k p_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (7)$$

$\varphi$  为径向基函数,  $\|\cdot\|$  为欧氏范数或  $L_2$  范数,  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  是次数小于  $m$  的所有双变量多项式空间  $\Pi_m^2$  的基函数. 系数  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  和多项式函数  $p_k(x)$  需要满足一定约束条

件(魏亦文和王彦春, 2012), 此处不赘述. 快速径向基函数所采用的 Gauss 径向基函数为

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (8)$$

其中  $\sigma$  为高斯基函数的标准偏差. 当  $\sigma$  不变, Gauss 函数值随着距离衰减很快, 当  $\|x_i - x_j\| > 8\sigma$  时, 高斯函数对于双精度计算的影响可以被忽略. 矩阵  $\Phi$  中的元素  $\Phi_{ij}$  可以近似为 0. 式(7) 可简写为  $AX = b$ , 如果计算区域大小远远大于  $\sigma$ , 那么矩阵  $A$  是非常稀疏的. 设计算点之间的平均距离为  $h$ ,  $h/\sigma$  越小插值越具全局性, 显然  $h/\sigma$  决定了 Gauss 径向基函数插值的精度.

快速 Gauss 径向基函数插值算法使用 Petsc 中 GMRES 求解器, 采用限制可加性 Schwarz 方法作为预条件子(Balay et al., 2004; Abhyankar, et al., 2013), 利用区域分解法将区域  $\Omega$  分解成多个子区域后进行并行求解. 随着计算区域内节点数  $N$  的增加, 快速 Gauss 径向基函数插值计算量为  $O(N)$ . 基于域分解和 PC 集群的并行计算不但可以节约存储, 还能提高收敛速度. 设区域重叠度为  $h/\sigma$ ,  $D$  是重叠区域尺度,  $B$  是非重叠区域尺度,  $T$  表示矩阵向量积中非 0 元素范围尺度, 如图 5 所示. 为确保快速 Gauss 径向基函数插值算法具有适当的收敛速度和精度, 实际应用中应该合理选取  $B, T, D$  的值.

#### 3.3 实例分析

节点属性建模方式直接对 GLL 点进行属性赋值, 适合 SPECIFEM2D 软件包自带规则矩形网格建模. 与单元属性建模方式相比, 节点属性建模方式可使单元内每个 GLL 点上属性值不一致, 从而确保复杂非均匀介质属性建模的高精度性. GLL 点属性赋值可以通过双线性插值和快速 Gauss 径向基函数插值两种插值方式来实现. 基于节点属性建模技术的谱元法波场模拟技术路线, 如图 6 所示.

以 Marmousi 复杂速度模型为例,  $x$  方向长度  $l_x = 9200$  m,  $z$  方向深度  $l_z = 3000$  m, 属性控制点分布于均匀网格节点上, 在各方向上节点间距为 4 m, 属性控制点总数  $N = 2301 \times 751 = 1728051 > 10^6$ . 对于 Marmousi 模型, 如果采用贴体网格剖分方式, 必须得到该模型的精确几何模型, 会相当困难, 此时若采用非贴体网格剖分方式具有更大灵活性. 首先对整个区域进行均匀四边形网格剖分, 然后利用稠密的属性控制点采用双线性插值或者快速 Gauss 径向基函数插值 GLL 点的属性完成建模.

考虑到内存需求和模拟速度, 本次设置 Marmousi 模拟谱单元数为  $460 \times 150 = 69000$ , 单元边长  $\Delta x = 20$  m, 每个谱单元内 GLL 点为 25 个, 因此整个区域中 GLL 点总数为 1725000. 对于稠密属性控制点  $N > 10^6$ , 采用双线性插值建模耗时 55 s. 为了测试快速 Gauss 径向基函数插值效率, 首先, 对区域按最小方向长度  $l_z = 3000$  m 进行归一化, 在  $h/\sigma = 1$ ,  $B/\sigma = 10$ ,  $T/B = 1.9$  固定不变的前提下, 设置不同的  $\sigma$ . 然后, 对原始属性网格进行抽稀得到新的属性控制点个数  $N$ . 最后, 在相同 KSP 迭代误差终止条件下, 采用快速 Gauss 基函数插值 GLL 点属性, 参数设置如表 2 所示. 表 2 中控制点数  $N = 17556$  对应抽稀网格间隔数为 10, 控制点数  $N = 108288$  对应抽稀网格间隔数为 4. 表 2 说明在参数  $h, B, D, T$  与  $\sigma$  的

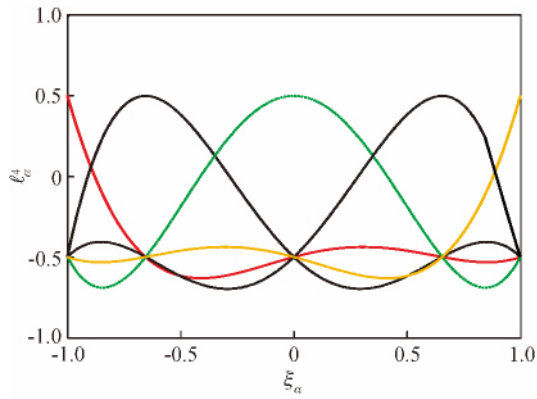


图2 Lagrange 插值基函数  
Fig.2 Lagrange interpolation basis function

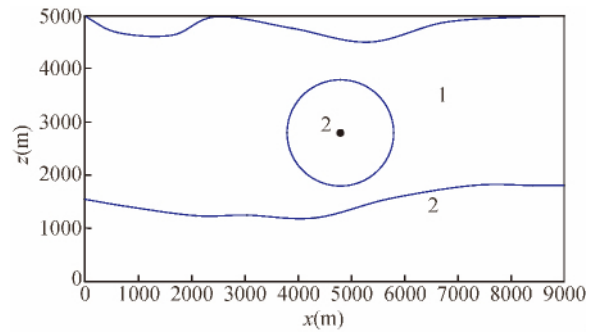


图3 块状几何模型  
Fig.3 Block geometry model

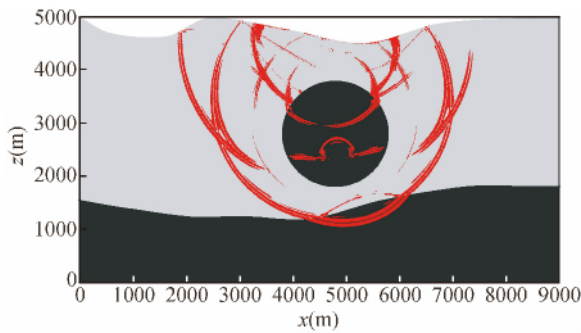


图4 0.72 s 波场模拟快照  
Fig.4 Snapshot of wave field simulation at 0.72 s

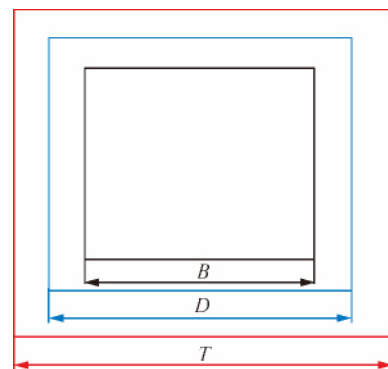


图5 重叠单元中的参数关系  
Fig.5 The relationship of parameters in overlapping element

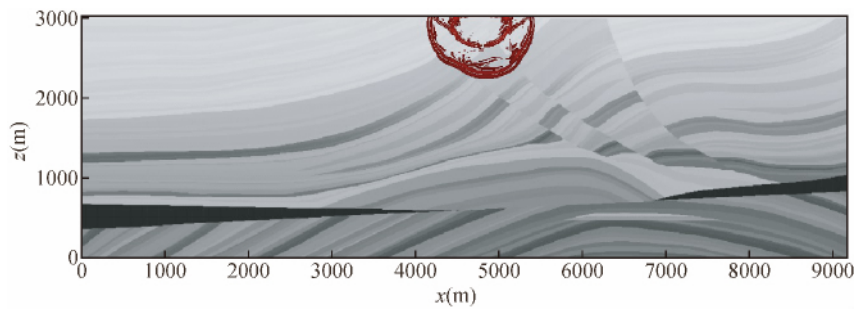


图7  $t = 0.442$  s 波场快照  
Fig.7 Snapshot of wave field simulation at 0.442 s

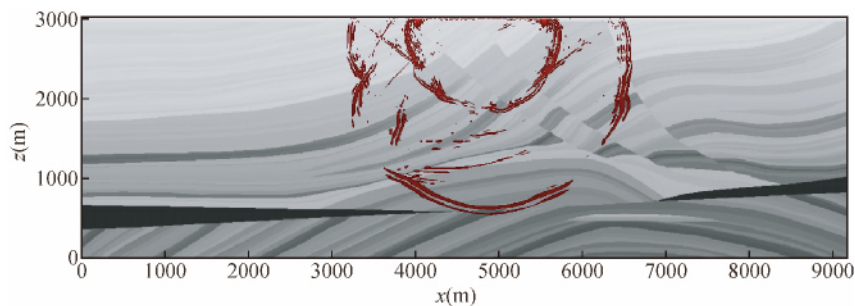


图8  $t = 1.02$  s 波场快照  
Fig.8 Snapshot of wave field simulation at 1.02 s

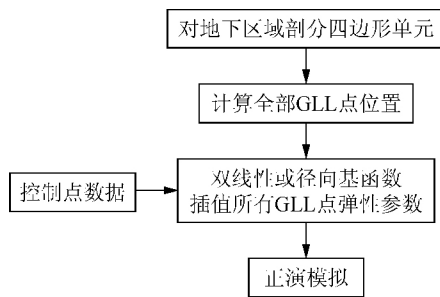


图6 波场模拟技术路线图

Fig. 6 Technology roadmap for wave field simulation

比值不变的情况下,快速 Gauss 径向基函数插值的收敛速度随着  $\sigma$  的减小而加快.

表2 快速径向基函数插值参数  
Table 2 Parameters of fast radial basis function interpolation

控制点数 $N$	$\sigma$	耗时 (s)	迭代次数	误差终止条件
17556	0.01	9.6 s	7	
17556	0.02	$\infty$	$\infty$	
108288	0.003	500 s	20	
108288	0.01	$\infty$	$\infty$	

选择  $N = 108288$  ( $10^4 \leq N < 10^6$ ) 个属性控制点进行快速 Gauss 基函数插值建模,纵横波速度比  $v_p/v_s = \sqrt{3}$ ,最小横波波速 867 m/s,最大纵波波速 5500 m/s,密度  $2600 \text{ kg/m}^3$ . 设置炮点位置(4800, 3000),设置 Ricker 子波峰值频率  $f_p = 30 \text{ Hz}$ ,由式(4)计算得最短横波波长内有 5.78 个采样点,最短纵波波长内 10 个采样点,按照式(5)设置时间采样间隔  $\Delta t = 8.5 \times 10^{-5} \text{ s}$  进行谱元法波场模拟,如图 7 和图 8 所示,表明以上参数设置能较好压制数值频散.

#### 4 结论

通常谱元法属性建模需要建立几何模型进行贴体网格剖分,单元属性建模方式比较适合贴体网格属性建模.在实际属性建模流程中,往往缺少几何模型,或者难以建立复杂的几何模型,而属性控制点是已知的.利用双线性插值和快速径向基函数插值方法原理,分析了控制点个数  $N > 10^6$  的双线性插值和  $10^4 \leq N < 10^6$  快速 Gauss 基函数插值效率.将以上双线性插值和快速 Gauss 径向基函数插值方法集成到 SPEC2D 中,在属性建模的基础上设置震源、观测系统等参数进行谱元法波动方程模拟,证明了两种属性建模方式的有效性,得出如下结论:

(1) 当介质属性在各个单元内为常数时,单元属性建模方式较为方便,特别是对于简单块状几何模型可以建立贴体网格以提高谱元法波场模拟精度.当存在复杂非均匀介质且几何模型未知时,已知一系列散乱分布的属性控制点,可采用基于插值算法的节点属性建模方式,对模型范围进行矩形

网格剖分可提高属性建模效率.

(2) 在节点属性建模方式中,对于复杂非均匀介质模型,控制点个数越多,插值建模精度越高.双线性插值特别适合规则分布的稠密网格控制点高精度插值建模,在控制点个数  $N > 10^6$  时,插值效率依然很高;快速 Gauss 插值针对稠密控制点 ( $10^4 \leq N < 10^6$ ),依然能够建立高精度的属性模型.

致谢 感谢审稿专家提出的修改意见和编辑部的大力支持!

#### References

- Abhyankar S, Smith B, Constantinescu E. 2013. Evaluation of overlapping restricted additive Schwarz preconditioning for parallel solution of very large power flow problems [C]. // Proceedings of the 3rd International Workshop on high Performance Computing, Networking and Analytics for the Power Grid. Denver, Colorado: ACM, Article No. 5, doi: 10.1145/2536780.2536784.
- Balay S, Buschelman K, Eijkhout V, et al. 2004. PETSc users manual [R]. Technical Report ANL-95/11-Revision 2.1.5. Argonne National Laboratory, 206-207.
- Cupillard P, Delavaud E, Burgos G, et al. 2012. RegSEM: A versatile code based on the spectral element method to compute seismic wave propagation at the regional scale [J]. Geophysical Journal International, 188(3): 1203-1220, doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05311.x.
- de Basabe J D, Sen M K. 2007. Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations [J]. Geophysics, 72(6): T81-T95, doi: 10.1190/1.2785046.
- Gumerov N A, Duraiswami R. 2010. Fast radial basis function interpolation via preconditioned Krylov iteration [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 29(5): 1876-1899.
- Jia Y Y, Xing X J, Shi J A, et al. 2014. The application of the maximum criteria optimizing technique in generation of body-fitted grids [J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 57(4): 1275-1283, doi: 10.6038/cjg20140424.
- Komatitsch D, Erlebacher G, G6ddecke D, et al. 2010. High-order finite-element seismic wave propagation modeling with MPI on a large GPU cluster [J]. Journal of Computational Physics, 229(20): 7692-7714.
- Komatitsch D, Vilotte J P. 1998. The spectral-element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 88(2): 368-392.
- Li X B, Bo J S, Qi W H, et al. 2014. Spectral element method in seismic ground motion simulation [J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 29(5): 2029-2039, doi: 10.6038/pg20140506.
- Li Z C, Xiao J E, Qu Y M, et al. 2016. The review of irregular free-surface forward modeling in time domain [J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 31(1): 300-309, doi: 10.6038/pg20160135.
- Liu Y S, Teng J W, Xu T, et al. 2014. Numerical modeling of seismic wavefield with the SEM based on Triangles [J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 29(4): 1715-1726, doi: 10.6038/pg20140430.
- Ma D T, Yang C Y, Li X X. Preliminary waves ray tracing by linear travel-time interpolation method in 3-D transversely isotropic medium [J]. Progress in Geophysics (in Chinese), 29(3): 1201-1205, doi: 10.6038/pg20140327.
- Tromp J, Komatitsch D, Liu Q Y. 2008. Spectral-element and adjoint methods in seismology [J]. Communications in Computational Physics, 3(1): 1-32.
- Wei Y W, Wang Y C. 2012. A hybrid interpolation for Reconstructing near-surface model [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics (in Chinese), 24(4): 466-470.

Yokota R, Barba L A, Knepley M G. 2010. PetRBF—A parallel  $O(N)$  algorithm for radial basis function interpolation with Gaussians [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25-28): 1793-1804.

### 附中文参考文献

贾艳艳, 邢学军, 史基安 等. 2014. 最大准则优化技术在贴体网格中的应用 [J]. *地球物理学报*, 57(4): 1275-1283, doi: 10.6038/cjg20140424.

李孝波, 薄景山, 齐文浩 等. 2014. 地震动模拟中的谱元法 [J]. *地球物理学进展*, 29(5): 2029-2039, doi: 10.6038/pg20140506.

李振春, 肖建恩, 曲英铭 等. 2016. 时间域起伏自由地表正演模拟综述 [J]. *地球物理学进展*, 31(1): 300-309, doi: 10.6038/pg20160135.

刘有山, 滕吉文, 徐涛 等. 2014. 三角网格谱元法地震波场数值模拟 [J]. *地球物理学进展*, 29(4): 1715-1726, doi: 10.6038/pg20140430.

马德堂, 杨春雨, 李绪宣. 2014. 基于双线性插值的三维横向各向同性介质初至波射线追踪 [J]. *地球物理学进展*, 29(3): 1201-1205, doi: 10.6038/pg20140327.

王秀明, Seriani G, 林伟军. 2007. 利用谱元法计算弹性波场的若干理论问题 [J]. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 37(1): 41-59.

魏亦文, 王彦春. 2012. 混合插值法重构近地表模型 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 24(4): 466-470.

严珍珠, 张怀, 杨长春 等. 2009. 汶川大地震地震波传播的谱元法数值模拟研究 [J]. *中国科学 D 辑: 地球科学*, 39(4): 393-402.